CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONCEPTO DE *NÚMERO REAL* EN ALUMNOS DE SECUNDARIA: ASPECTOS COGNITIVOS Y ACTITUDINALES

ROMERO, ISABEL[1] y RICO, LUIS[2]
[1] Universidad de Almería.
[2] Universidad de Granada.

SUMMARY

During the school year 1993-94, we carried out an action-research experience with 14-15 year-old students aimed to study their understanding of real numbers. One of the main features in the introduction of the topic was the work on problematic situations. In the treatment and resolution of these situations, we assumed that social interaction and communication processes in the classroom setting have a great relevance for the development of mathematical understanding in the students. In this article, we explain the assumptions and the methodology that we used in our experience and interpret some of its results, which show the advantages of this approach in the construction of advanced numerical thinking.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los aspectos sociales en la construcción de conocimiento se ha convertido en un área de creciente interés en educación matemática. Los trabajos de Bishop y Confrey (1986) en Gran Bretaña, Balacheff (1986) y Laborde (1994) en Francia, Bartolini-Bussi (1994) en Italia, Cobb y otros (1991) en Estados Unidos, Bauersfeld y otros (1988), Strasser (1994) y Voight (1994) en Alemania, entre otros, marcan un cambio en el foco de atención de varios educadores matemáticos. En décadas previas, el interés estaba dirigido fundamentalmente al estudio del pensamiento individual de los alumnos o de los profesores. Sin embargo, actualmente se observa una tendencia creciente a trascender este esquema y considerar que, cuando al menos dos personas (un profesor y un alumno, o dos alumnos) están implicadas en un proceso, se ponen en juego una serie de factores que dependen de su mutua interacción, y que estos factores «no son condiciones periféricas para el aprendizaje de las matemáticas, sino que son intrínsecos a dicho aprendizaje» (Voight, 1994).

Hasta el momento presente, la mayoría de los trabajos de investigación que tratan de la interacción en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se refieren o se han llevado a cabo en niveles de enseñanza primaria (Cobb et al., 1991; Bartolini-Bussi, 1994; Lo y Wheatley, 1994; Voight, 1994). La investigación que considera dichos aspectos con relación a la construcción de pensamiento matemático avanzado es escasa, si bien hay autores que han llegado a convencerse de su importancia y han tratado de incorporar esta dimensión en sus trabajos (Douady, 1980).

En el caso del pensamiento numérico avanzado y, en particular, en relación con el tópico de los números reales, han surgido llamadas en nuestra comunidad educativa a trascender el estudio de las concepciones de los estudiantes y diseñar, implementar y evaluar experiencias de enseñanza-aprendizaje en las que se recomienda el enfoque en la resolución de problemas y la discusión (Monaghan, 1988; Fishbein, 1995).

Nuestro trabajo se sitúa en esta línea. Durante el curso escolar 1993-94, realizamos una experiencia de investigación-acción con una clase de alumnos de 14-15 años, correspondiente al nivel de 1° de BUP (bachillerato unificado polivalente), destinada a estudiar potencialidades y dificultades que el concepto de *número real* puede presentar para la comprensión matemática de los alumnos, en las etapas iniciales de su construcción. En este estudio, los factores sociales se consideraron especialmente relevantes y los resultados obtenidos confirmaron su importancia.

A continuación, explicaremos los supuestos generales sobre el papel en la investigación educativa de los aspectos sociales de la construcción de conocimiento, presentaremos el diseño de nuestro estudio y la metodología empleada, analizaremos e interpretaremos los resultados obtenidos y realizaremos algunas reflexiones finales.

SUPUESTOS GENERALES DEL ESTUDIO

La importancia para la investigación educativa del contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje es uno de los principales supuestos del trabajo que hemos realizado. Nuestro objetivo fundamental ha sido estudiar los procesos que una clase de alumnos ha llevado a cabo para construir conocimiento sobre el número real en el contexto escolar en el que han tenido lugar dichos procesos, más que explicar la evolución cognitiva individual que subyace en la adquisición del concepto en cuestión.

Esta dimensión social se ha comenzado a incorporar en los más recientes desarrollos de la psicología cognitiva; no obstante, durante mucho tiempo, la característica básica común a varias disciplinas fue el enfoque en el individuo. La idea de que el pensamiento es independiente del contexto está implícita en la tradición de la psicología experimental de la investigación sobre el aprendizaje y el pensamiento. Sin embargo, sólo asumiendo que el pensamiento opera de la misma manera en contextos diferentes, puede uno esperar aprender algo sobre el mismo observando el comportamiento en ambientes muy restringidos y a menudo artificiales (Resnick, 1989; p. 11).

Autores como Hiebert y Carpenter abogan por que las investigaciones sobre la comprensión de alumnos y profesores sean diseñadas para proporcionar un análisis de cómo interactúan los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estamos de acuerdo con estos autores en que «la investigación que contribuya a nuestra comprensión de la comprensión de los alumnos y los profesores será aquélla que revele el pensamiento de los profesores y los alumnos tal como ocurre en entornos de clase y tal como cambia a lo largo de la instrucción» (Hiebert y Carpenter, 1992; p. 92).

Además de esto, hemos de considerar que, tal como sostienen Bauersfeld (1983) y Crawford (1988), las técnicas de investigación deben emplearse en contextos de investigación que sean también significativos para los alumnos. Esta significatividad no se logra meramente pidiendo a alguien que exprese su pensamiento en voz alta o desarrollando pruebas para pasar a los alumnos. Para encontrar contextos significativos es de una importancia primordial tener en cuenta los factores socioculturales (Bauersfeld y Crawford, citados por Van der Brink, 1990).

En nuestro estudio, hemos considerado la relevancia de los factores sociales y contextuales en dos niveles. En un primer nivel, para que pueda tener lugar un auténtico progreso cognitivo en el dominio social, es necesario prestar especial atención al clima en el que transcurre el proceso de enseñanza-aprendizaje y a los aspectos actitudinales. El establecimiento de una atmósfera que fomente y nutra el sentido de confianza e iniciativa en los alumnos, la ausencia de presión para encajar en las expectativas del otro, la libertad para expresar las propias ideas, sea cual sea el estado de madurez en que se encuentren, la sensación de ser parte significativa desde el punto de vista cognitivo dentro del grupo, y el desarrollo de un respeto y un interés genuino por la comprensión y las ideas de los otros son fundamentales a este respecto.

En un segundo nivel, consideramos específicamente el aspecto sociocognitivo en la construcción de conocimiento matemático. Para ello, hemos de coordinar tres puntos de referencia: el conocimiento construido en la comunidad de la educación matemática, las prácticas compartidas en la comunidad de la clase y las concepciones que los estudiantes forman a partir de estas prácticas.

Para la comunidad de la educación matemática, las prácticas compartidas en la comunidad matemática son privilegiadas en el sentido de que se basan en un conocimiento formal común que incluye algoritmos, sistemas de representación, hechos, conceptos y teorías, así como convenios para probar y realizar demostraciones e investigaciones, cuyo último propósito es trascender el conocimiento anterior a través de la crítica y el desarrollo de nuevos paradigmas. Asimismo, las prácticas matemáticas compartidas en diversos sectores sociales y profesionales y las necesidades presentes y futuras de estas comunidades y de la sociedad en general constituyen otra referencia fundamental. La comunidad de la educación matemática tiene en cuenta estos conocimientos y sistemas de prácticas compartidos a la hora de definir los límites de los objetivos cognitivos que serían deseables para los estudiantes. Además, hace uso de las contribuciones de disciplinas como la psicología, la pedagogía, la sociología y la epistemología, para construir conocimiento acerca de cómo lograr los mencionados objetivos cognitivos (Rico, 1997, p. 335).

Como miembro de la comunidad de la educación matemática, el profesor tiene acceso al conocimiento de tipo matemático y pedagógico desarrollado en dicha comunidad. Como miembro de la comunidad escolar y, más concretamente, de la comunidad de su clase, el profesor tiene contacto directo con las potencialidades y dificultades de los alumnos para acceder al conocimiento matemático estipulado para ellos, con objeto de capacitarlos con las habilidades matemáticas necesarias para integrarse en diversas comunidades que constituyen la sociedad actual. Para llevar a cabo esta labor, es importante considerar al alumno como alguien que trata de dotar de significado sus experiencias, y a la clase como una comunidad que le proporciona medios para contrastar los significados que atribuye y converger hacia significados compartidos.

Las prácticas en la comunidad de la clase deben, por tanto, ser diseñadas para ayudar a los alumnos a dotar de sentido el conocimiento que otros han producido y a asimilar dicho conocimiento de manera que los capacite para ir más allá de su mera reproducción, hacia la interpretación, evaluación, análisis, síntesis y organización de información que caracteriza un progreso cognitivo auténtico. Las tareas que fomenten en el estudiante la búsqueda, construcción y comprobación de conexiones entre distintas piezas de conocimiento, junto con las discusiones en pequeño y gran grupo, con otros estudiantes y con el profesor, pueden apuntar en la dirección deseada.

Para arrojar luz sobre un problema o una cuestión abierta, los estudiantes han de construir nuevas conexiones entre piezas de información previamente asimiladas; asimismo, al participar en los procesos de discusión, han de explicitar, contrastar, modificar y extender las conexiones formadas. De esta forma se enriquece y consolida progresivamente la red cognitiva que, según Hiebert y Carpenter (1992), determina el grado de comprensión matemática del alumno. Por otra parte, el profesor o profesora tiene la oportunidad de observar las conexiones explicitadas por los alumnos y, de esta forma, puede reforzar aquéllas que presentan más ventaja para avanzar en la comprensión del tópico, encontrar modos de refutar las que son inapropiadas, considerar conexiones que no había tenido en cuenta *a priori* y reflexionar sobre sus posibles derivaciones, etc. Sobre estas bases, puede establecerse un flujo entre profesor y alumnos que sea mutuamente enriquecedor, y en el que ambas partes se beneficien como estudiantes y como guía, respectivamente.

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA Y METODOLOGÍA

El número real es, sin duda, un concepto matemático complejo, cuya evolución ha requerido un largo período histórico que se remonta, según los datos disponibles, a más de siete mil años (Bell, 1989). Su actual estado de elaboración es el resultado de las numerosas interpretaciones, intentos de resolver problemas y superar obstáculos, desarrollos conceptuales y formalizaciones, que han tenido lugar a lo largo de todo este tiempo.

Como ocurre con cualquier concepto matemático avanzado, hay una distancia considerable entre la manera en que estos conceptos han evolucionado en la comunidad matemática durante un largo período histórico, la manera en que son formalizados y presentados en los procesos habituales de enseñanza, y la manera en que se organizan y estructuran cognitivamente. Si pretendemos que el concepto de *número real* se asimile de forma significativa, hemos de contar con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los alumnos han de integrar diferentes conjuntos numéricos –naturales, enteros, racionales e irracionales–, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, alcanzar una comprensión en profundidad de los procesos infinitos y de paso al límite.

La complejidad de todos estos aspectos y de las múltiples relaciones entre ellos hace imposible que el concepto de *número real* pueda ser aprehendido por medio de un enfoque que demande de los estudiantes únicamente un entendimiento superficial de algunos puntos aislados, como podría ser la asimilación de reglas para la lectura, escritura y las operaciones con estos números. Por el contrario, los alumnos han de construir una red cognitiva progresivamente más rica y refinada que les permita asimilar conceptos matemáticos complejos (como el de infinito potencial, longitudes inconmensurables, razones irracionales, infinito actual, etc.), por medio de procesos de pensamiento avanzado (como el uso de la analogía, la traducción entre distintos sistemas de representación, etc.). Esta necesidad es precisamente la que proporciona las bases para una interacción y una comunicación matemática sustantiva de los alumnos entre sí y con el profesor o profesora, para elaborar y dotar de sentido unas prácticas compartidas complejas.

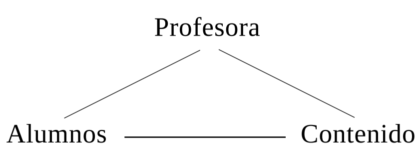
Ahora bien, es evidente que un enfoque que pretenda estudiar la construcción de un concepto matemático avanzado tal como ocurre en el entorno natural de la clase se enfrenta a numerosas complicaciones y resulta inevitablemente complejo. Para llevar a cabo la gestión de dicha complejidad, así como su percepción directa, decidimos que uno de los autores-investigadores estuviera encargado de llevar a cabo la experiencia en el aula, asumiendo el doble papel de profesora e investigadora en una clase de 32 alumnos y alumnas de 14-15 años. En estas condiciones, diseñamos la experiencia siguiendo las cuatro etapas básicas de una investigación-acción (planificación, acción, observación y reflexión) así como la idea de *secuencialidad* de las mismas en forma de ciclos (Lewin, 1946; Elliot, 1973; Kemmis, 1982; Ebbut, 1985), citados por McNiff, (1984) y Castro (1994). Si bien nuestro trabajo se organizó en dos ciclos sucesivos, uno para los números racionales y otro para los irracionales y reales, en lo que sigue omitiremos los detalles relativos a esta división y describiremos de forma general las cuatro etapas básicas del proceso.

Para *planificar* nuestra experiencia de investigación, realizamos un estudio detallado de la estructura matemática de los números reales, de los sistemas de representación que se utilizan para trabajar con dichos números, de los problemas y fenómenos que están en el origen del concepto de *número real* y de las competencias cognitivas asociadas a la comprensión del mismo. A partir de este estudio, estuvimos en disposición de articular una serie de cuestiones fundamentales de investigación, centradas en los principales problemas epistemológicos del número real y en el trabajo con sus diferentes sistemas de representación. Estas cuestiones de investigación constituyeron el eje a partir del cual diseñamos el material didáctico: situaciones problema, ejercicios, trabajos de exploración individual y en grupo, preguntas para la discusión, exámenes, etc. La organización de la clase se diseñó para realizarse básicamente mediante el trabajo en grupos de cuatro alumnos sobre las tareas, seguidas de la discusión en clase dirigida por la profesora investigadora; ocasionalmente los alumnos realizarían trabajos de exploración y presentarían los resultados al resto de la clase.

La fase de *acción* tuvo lugar durante el curso escolar de 1993-94, con un grupo de 32 alumnos y alumnas de 14-15 años que cursaban 1° de BUP en un instituto de bachillerato de la ciudad de Granada. Como ya hemos mencionado, la profesora de matemáticas del grupo es autora del presente artículo.

La *observación* se llevó a cabo mediante una serie de instrumentos diferentes: diario de la profesora-investigadora, producciones escritas de los alumnos y grabaciones en audio y vídeo de las sesiones de discusión en gran grupo correspondientes a las situaciones de trabajo mencionadas anteriormente y de las sesiones correspondientes a la presentación de los alumnos de sus trabajos de exploración.

En la fase de *reflexión*, los datos recogidos se analizaron e interpretaron siguiendo una metodología cualitativa. Para ello construimos instrumentos de análisis destinados a organizar la información sobre las relaciones entre las tres componentes del triángulo didáctico alumnos - contenido - profesora.



En lo que sigue, centraremos nuestra atención exclusivamente en el análisis de algunos aspectos sociales con referencia a la construcción del concepto de *número real* con el grupo de alumnos mencionado anteriormente. Estos aspectos sociales se concretan en las relaciones profesora-alumnos y alumnos-contenido. Para llevar a cabo el análisis de la relación profesora-alumnos, utilizamos el diario de la profesora-investigadora. Para analizar la relación alumnos-contenido, adaptamos los estándares para la evaluación en el aula de Newman, Secada y Whehlage (1995). En la siguiente sección, presentaremos los resultados obtenidos a través de este análisis, así como nuestras reflexiones al respecto.

RESULTADOS

Relación profesora-alumnos

A través del *diario de la profesora investigadora* es posible reconstruir la negociación de las normas sociales dentro de la clase, la evolución de los aspectos actitudinales y la creación de una atmósfera de aprendizaje de apoyo y confianza, junto con todos los problemas y obstáculos que la clase hubo de superar a lo largo del proceso didáctico para hacer esto posible.

Al comienzo de la experiencia, la actitud y el comportamiento de los alumnos resultó ser un problema serio para la viabilidad del plan que los investigadores teníamos en mente. Conflictos de diversa índole surgieron sobre todo durante los períodos de discusión en gran grupo; entre ellos podemos destacar: la ausencia de reflexión sobre la pertinencia de la participación personal en un momento determinado, la falta de atención a las intervenciones de los compañeros y la preocupación por dar respuestas «acertadas o equivocadas» más que por contribuir a arrojar luz sobre una cuestión o sobre los propios pensamientos acerca de una cuestión.

Se observaba también un sentimiento de incomodidad creciente ante la responsabilidad que la profesora pretendía transferir a los alumnos sobre su propio proceso de aprendizaje. Los estudiantes tenían unas fuertes expectativas de que el papel de la profesora fuera proporcionarles las respuestas correctas que ellos debían retener en lugar de ser alguien que estaba tratando de ayudarles a dotar de sentido a sus experiencias y clarificar su pensamiento. Un comentario extraído del diario de la profesora investigadora en una de las primeras sesiones puede ilustrar este punto:

> A la pregunta «¿Cuál es el número más grande que conoces?», varios alumnos han contestado que «el número infinito». Cuando he tratado de que clarificaran lo que querían decir con *el número infinito,* los alumnos han reaccionado con incomodidad y les resultaba bastante difícil responder. Algunos han respondido que era el símbolo ∞, otros han aventurado que podía ser un número con infinitas cifras como 6789141189... o 99999999... y, finalmente, uno de los alumnos se ha enfadado y me ha dicho: «Pero usted es la profesora. Usted es quien tiene que decirnos cuál es el número infinito.»

Estos problemas impedían un buen ritmo de avance desde el punto de vista conceptual, lo cual, a su vez, repercutía negativamente en la actitud de algunos alumnos, de modo que el proceso resultaba cada vez más difícil de controlar para la profesora. Finalmente los malos resultados, reflejados en las calificaciones al concluir el primer ciclo de la investigación-acción, pusieron en evidencia la necesidad de una revisión profunda del estado de cosas en la comunidad de la clase. En este punto, la profesora-investigadora confrontó al grupo con la necesidad de explicitar las dificultades que todos los miembros estaban encontrando, de averiguar sus posibles causas, de tomar las decisiones pertinentes y de asumir colectivamente la responsabilidad de superar la situación. Se dedicó tiempo a pensar, escribir y compartir opiniones. Al final, salieron a la luz los siguientes problemas relativos a la interacción:

– La falta de disciplina, autocontrol y respeto por las contribuciones de los compañeros por parte de los alumnos en general dificultaban enormemente las discusiones en gran grupo. Un punto que merece la pena destacar con respecto a esta cuestión es que sólo la profesora y los alumnos más responsables reconocían la importancia de estos factores; curiosamente, los alumnos que causaban más problemas no consideraban que fueran algo preocupante.

– La dificultad de los alumnos para adaptarse a las demandas de autonomía, madurez y responsabilidad por el propio aprendizaje, que requería la nueva metodología. Tanto la profesora como los alumnos coincidieron en este punto.

– Una diferencia considerable en el nivel de interés y de madurez en los alumnos del grupo. Tanto la profesora como los alumnos reconocieron este aspecto.

– El reconocimiento, en privado, por parte de la profesora de su falta de recursos iniciales para detectar los conflictos actitudinales y los problemas de interacción a tiempo, y para tratarlos de forma eficaz. En efecto, la profesora investigadora se dio cuenta de estar actuando bajo una fuerte tensión emocional, motivada por las presiones de la investigación para tratar múltiples aspectos de considerable complejidad sobre los números reales, con un grupo de estudiantes que eran incapaces de avanzar conceptualmente debido a problemas actitudinales y de interacción social. En este momento, hubo de aceptar que la interacción didáctica, que en un principio se habia considerado como una variable importante del estudio, pero no su objetivo principal, se había convertido en una prioridad que era necesario atender para avanzar aspectos más complejos y específicos en la construcción de conocimiento matemático.

Para superar esta situación, la profesora y los estudiantes idearon, conjuntamente, y adoptaron varias estrategias de funcionamiento futuro:

– Los estudiantes se comprometieron a considerar su papel como parte de una comunidad encaminada hacia el aprendizaje, en la cual la responsabilidad por la construcción de conocimiento era compartida por todos los miembros, no sólo por la profesora en relación con alumnos individuales. Esto implicaba ir más allá de su propia individualidad, para considerar, respetar y ser capaces de dar y recibir de los demás compañeros. Al mismo tiempo, la profesora se comprometió a llamar la atención de los alumnos cuando ella observara problemas en este sentido y a aplicar las medidas de disciplina acordadas por el grupo con aquellos estudiantes que persistieran en ignorar a la comunidad.

– La profesora y los alumnos redistribuyeron los grupos pequeños de trabajo de acuerdo con criterios establecidos por la clase. Por ejemplo, algunos de los criterios que los estudiantes propusieron y aceptaron fueron que los grupos tuvieran niveles de habilidad matemática combinados, para que los alumnos más aventajados ayudaran a mantener el equilibrio en el grupo en lugar de agrandar la distancia cognitiva, y que los grupos fueran mixtos en género, ya que algunos de los alumnos declararon que las alumnas parecían «ser más maduras y calmadas».

– Los dos investigadores acordaron establecer un período de interrupción en el trabajo con el tópico de los números reales y trabajar durante un tiempo en otro tema, con el fin de intentar consolidar una buena dinámica en la interacción social del grupo sin la presión del contenido y las demandas a este respecto del plan de investigación.

Después de algo más de un mes de implementar estos cambios, se pudo observar una evolución notable. La dinámica del grupo había mejorado de forma que permitía una interacción sustancial con la que era factible abordar el tema de los números reales, como se pondrá de manifiesto en la sección siguiente. La profesora había ganado en capacidad de percibir y reaccionar de manera efectiva a las causas de perturbación más importantes. Los estudiantes habían ganado en implicación e iniciativa para realizar actividades como resolver y proponer problemas, implicarse en discusiones reiteradas sobre un punto a lo largo de sesiones diferentes profundizando cada vez más, hacer trabajos voluntarios y compartirlos con el resto de la clase, etc. Además, los alumnos también progresaron considerablemente en su capacidad y sensibilidad para crear una atmósfera de apoyo para el aprendizaje; los siguientes episodios pueden ayudar a ilustrar esta evolución:

> Durante las primeras sesiones, cuando los estudiantes tenían que explicar sus procedimientos de resolución de problemas, razonamientos, justificaciones, etc. a sus compañeros –puesto que la profesora insistía en no proporcionar las respuestas «correctas», sino que trataran de elaborarlas entre todos–, eran comunes las reacciones hostiles, encaminadas a quejarse de la falta de claridad:
>
> A: No lo entiendo. Es que no lo explica bien.
>
> P: ¿Quién lo quiere explicar?
>
> A: Yo.
>
> A: Pues explícate bien.
>
> A medida que la dinámica en el grupo iba evolucionando, pudimos observar una atmósfera de más confianza y apoyo entre los estudiantes (esto se hizo especialmente patente cuando diferentes grupos de alumnos explicaban su trabajo voluntario al resto de la clase):
>
> A: Yo no he entendido eso.

A: ¿Qué?

A: Lo que has escrito en la pizarra.

A: ¿El qué? ¿El hexágono? Pero si no es complicado. ¿Quieres que lo explique otra vez?

A: Sí, explícaselo otra vez.

Incluso en algunas ocasiones, los alumnos resultaron ser más pacientes que la profesora. Ésta es la reacción a un argumento largo y complicado de un compañero:

A: ¿Puedes repetir?

A: ¿Puedes repetirlo más lento?

A: Sí, repítelo más lento.

P: ¿Hay alguien que quiera explicarlo, digamos, de una manera más fácil?

A: Pero, «seño», a lo mejor lo explica bien, pero lo que pasa es que va muy rápido.

Relación alumnos-contenido

En este apartado trataremos, específicamente, el aspecto cognitivo de la interacción didáctica. Es decir, centraremos nuestra atención en ilustrar cómo se produjo la construcción social del conocimiento sobre algunos aspectos conceptuales del número real a lo largo de las discusiones de clase. Para ello, utilizaremos tres estándares desarrollados por Newmann, Secada y Wehlage (1995) como criterios para evaluar la autenticidad de los procesos de enseñanza dirigidos a promover la comprensión de los estudiantes: pensamiento de nivel avanzado, profundidad de conocimiento y conversación sustantiva.

– El *pensamiento de nivel avanzado* ocurre cuando los estudiantes manipulan información transformando su significado e implicaciones; es decir, combinando hechos e ideas para sintetizar, explicar, generalizar, formular hipótesis o llegar a conclusiones o interpretaciones que generen nuevos significados y comprensión para ellos. Cuando los estudiantes se implican en un proceso de pensamiento de nivel avanzado, se introduce en el proceso didáctico un elemento de incertidumbre que hace que los resultados no sean siempre predecibles. Como opuesto al pensamiento de nivel avanzado, el pensamiento de bajo nivel ocurre cuando se pide a los estudiantes que registren o reciten información factual, o que empleen reglas y algoritmos a través de procedimientos rutinarios; se considera a los alumnos como receptores de información y se les proporciona conocimiento preespecificado en un rango que varía desde hechos simples hasta conceptos más complejos.

– La *profundidad de conocimiento* se pone de manifiesto cuando las ideas centrales de un tópico o disciplina se exploran con detalle, mostrando las interconexiones y relaciones entre ellas. El conocimiento es profundo cuando, en lugar de ser capaces solamente de recitar piezas fragmentadas de información, los estudiantes expresan comprensiones relativamente sistemáticas, holísticas e integradas de conceptos fundamentales en un tópico determinado. El conocimiento es superficial cuando estas ideas centrales se trivializan y el conocimiento se presenta como no problemático.

– La *conversación sustantiva* tiene lugar cuando los alumnos se implican en intercambios de información extensos con el profesor o con sus compañeros sobre la materia en cuestión, cuando la interacción es recíproca, y cuando promueve una comprensión compartida y coherente. Para que un fragmento de conversación se considere sustantivo, deben ocurrir al menos tres intercambios seguidos ligados de forma coherente y sustancial como respuestas consecutivas, aunque no necesariamente ha de ser entre las mismas personas. En el extremo opuesto, la conversación sustantiva está ausente en clases en las que las preguntas del profesor están motivadas principalmente por una lista planeada de antemano, que demanda de los estudiantes respuestas cortas y poco o ningún seguimiento; tal tipo de discurso es el equivalente oral de cuestionarios de respuesta corta o de rellenar los espacios en blanco.

A lo largo del proceso didáctico que venimos describiendo, los alumnos trabajaron sobre situaciones especialmente diseñadas con el fin de confrontar una serie de aspectos clave para la comprensión de los números reales. Varios de estos aspectos tienen su raíz en problemas epistemológicos que hubieron de ser superados en el desarrollo histórico del concepto (como el problema de la inconmensurabilidad de longitudes, el significado de las notaciones infinitas no periódicas y el debate en torno al estatus de número de estas notaciones) y otros responden a necesidades de tipo didáctico y curricular (como la confusión entre el plano físico y el plano teórico en el terreno de la medida o el estudio de la correspondencia entre la notación decimal y la notación operatoria de los números reales). La descripción completa de estos aspectos clave para la comprensión de los números reales, su tratamiento en el aula y los resultados obtenidos puede encontrarse en Romero (1996). Nuestro objetivo en la presente sección es ilustrar cómo los alumnos fueron capaces de mantener una conversación sustantiva en las discusiones en gran grupo, desplegando para ello una serie de habilidades cognitivas que entran dentro de la categoría de pensamiento de nivel avanzado y poniendo de manifiesto su profundidad de conocimiento sobre ideas centrales en el concepto de *número real*.

Pensamiento de nivel avanzado y conversación sustantiva

La consideración de las expresiones decimales infinitas no periódicas constituyó uno de los focos fundamentales en nuestro trabajo con los alumnos. La discusión sobre su naturaleza y su estatus de número fue abordada en distintos momentos, utilizando diferentes sistemas de representación de los números reales y enfoques variados. Entre los indicativos de pensamiento de nivel avanzado puesto en juego por los alumnos para resolver las situaciones didácticas propuestas y discutir sobre ellas, hemos seleccionado los siguientes:

– *El uso de la analogía para formular hipótesis acerca del estatus de número de las expresiones decimales infinitas no periódicas y la transformación del significado del proceso operatorio en objeto actual.* En el esfuerzo para decidir si los decimales infinitos no periódicos podían ser considerados números, los alumnos hicieron uso de la correspondencia entre la notación decimal y fraccionaria de los números racionales y de la posible analogía con los decimales infinitos no periódicos y su notación operatoria. Esta estrategia fue utilizada en diferentes momentos y con una grado de elaboración progresivo:

P: ¿Por qué piensas tú que no son números [los decimales infinitos no periódicos]?

A: Porque no puedes operar con ellos.

A: Eso no es verdad. Sí que se puede operar con ellos.

A: Yo lo he visto en el libro.

A: ¿Y cómo operas con ellos?

A: Yo... en el libro... ayer estaba buscando en el libro, y vi cómo se podían sumar y multiplicar radicales.

A: Pero, si son números infinitos, ¿cómo vas a poder operar con ellos?

A: En el libro viene cómo ponen común índice en los radicales para operar con ellos. Yo he visto cómo se suman.

[...]

A: No se puede operar con ellos.

A: ¿Cómo se va a poder operar con una raíz cuadrada?

[...]

P: Mira lo que dice T.

A: Que con los periódicos puros no se puede operar, se opera con las fracciones; lo mismo pasa con los radicales. No se opera con el número infinito, se opera con el radical.

A: Exactamente, exactamente.

A: Es que la fracción es lo mismo que el decimal infinito. Es lo mismo...

A: Y el radical también es lo mismo...

[...]

A: ¡Ah!, que la fracción... he dicho que es igual que su número decimal. Digo que un radical es igual al número que resulta, aunque sea infinito, pero es igual a eso.

A: Pues entonces sí se puede...

– *La capacidad de los alumnos para conectar información relativa a momentos y situaciones distintas dentro de la secuencia didáctica para arrojar luz sobre el carácter de los decimales infinitos no periódicos en el terreno geométrico.* En cierto momento de la secuencia didáctica, se preguntó a los estudiantes si, en una recta donde estaban señalados el 0 y el 1, para cualquier punto que eligiéramos, habría un número que le correspondiera, y de qué clase podría ser dicho número. En esta primera etapa, el dilema surgió en relación con los decimales infintos no periódicos.

P: O sea, que si yo doy un punto en la recta, ¿le corresponde un número siempre?

A: Sí

P: ¿Y de qué tipo puede ser ese número?

A: De todos esos [racionales].

A: Todos menos los infinitos no periódicos

P: ¿De todos éstos? ¿Y de éstos [irracionales] no?

A: No

P: ¿De éstos no?

S: Dice que sí, que de éstos también.

A: No, porque...

A: Pero, si no sabes el final del número, no sabes el sitio donde lo tienes que poner.

P: Bueno, y tú, S, por qué piensas que sí.

A: Porque...

A: Por eso.

A: A lo mejor, si se pudieran pasar a fracción, sí se podría, pero, como no se pueden pasar a fracción...

P: Pero los infinitos no periódicos...

A: Por eso. No se pueden pasar a fracción.

[...]

A: ...esos números tienen que estar en la recta.

A: Claro que sí.

A: No.

A: Ponle un ejemplo y que intente representarlo, y ya verá que no se puede.

A: Que tengo hambre.

A: Pon un ejemplo.

A: ...si hubiéramos hecho aquello, lo sabríamos. ¿Os acordáis? Estamos en el mismo caso que Ã2.

A: Pero no se puede representar.

A: ¿Se puede representar Ã2 en la recta?

A: Pero es que no se sabe.

En este caso, el alumno estaba refiriéndose a una discusión anterior sobre si Ã2 podía ser representado en la recta de forma exacta; es decir, no mediante aproximaciones decimales. Esta cuestión quedó abierta, a la espera de una actividad posterior sobre la construcción de cuadrados de área dada. Llegados a este punto, tenía sentido introducir dicha actividad, discutir sobre la longitud de los lados de los cuadrados y representar raíces cuadradas en la recta trasladando los lados de los cuadrados, proporcionando así a los alumnos la oportunidad para construir las conexiones que estaban necesitando e, incluso, demandando en ese momento. Los estudiantes tuvieron que realizar, además, otras conexiones de carácter técnico, como la relativa a las unidades de medida:

P: Bueno, ¿hay un punto en la recta que le corresponda a esto [la expresion decimal de Ã3]?

A: Sí.

A: Claro.

A: Claro que hay uno.

A: Sí.

P: ¿Hay uno o no hay uno?

A: Sí, sí hay uno.

P: Y ahora, ¿cuál es?

A: ...

P: ¿Os acordáis que hacíamos un cuadrado de área 3? ¿3 qué?, ¿centímetros?

A: 3 unidades.

P: ¿3 unidades de cuáles?

A: De las que quieras.

[...]

P: Pero 3 unidades... ¿qué unidades?, ¿3 palmos?

A: 3 unidades cuadradas.

P: Sí, 3 unidades cuadradas. Pero ésta, la unidad. La unidad, lo mismo que los centí-metros cuadrados, la unidad es el centímetro, de estas unidades cuadradas, la unidad del lado, ¿cuál es?

A: La de la recta.

[...]

P: Una unidad, ¿de cuáles?, ¿de las que yo quiera?

A: Un centímetro, por ejemplo.

P: ¿Un centímetro, por ejemplo?

A: No.

A: Sí, puede ser.

A: O un metro.

P: Oye, pero entonces... Shsss. Si uno me pinta un cuadrado de 3 centímetros cuadrados y otro me lo ha pintado de 3 milímetros cuadrados... pues, entonces... pues a uno le queda la raíz de 3 por aquí, y a otro le queda por allá.

A: No.

A: ...

A: ...la misma unidad de la recta.

A: Que cojas de unidad, para hacer el cuadrado, en lugar del centímetro, la unidad de la recta, y coges...

P: ¿Eso se entiende o no?

A: Sí.

Algún tiempo después, los estudiantes pudieron trabajar en el caso del número Pi y poner en juego las conexiones realizadas anteriormente:

P: Entonces esas aproximaciones van encajando cada vez más; pero ¿existe un punto que corresponda exactamente a Pi?

A: No, no.

A: Sí. Como la raíz. Por ejemplo, mides la circunferencia con un portalápiz y pones la medida, y eso ya sería Pi según el teorema.

[...]

A: Isabel, ¿hay una representación exacta para Pi?

P: Sí, fijaros en lo que había dicho antes K: «Si cojo una circunferencia, la longitud, ¿qué mide?»

A: ¿La longitud?, ¿la longitud?

P: Mide Pi por el diámetro, ¿no?

A: Sí.

P: Si yo cojo la circunferencia, la longitud de la circunferencia mide Pi por su diámetro, ¿sí o no?

A: Sí.

P: Bueno, pues entonces, decía K: «Yo parto la circunferencia y me la traslado ahí.» ¿Cualquier circunferencia? ¿Una chica? Porque una chica no tiene la misma longitud que una grande. ¿Cuál es la que cojo?

A: El radio tendría que ser la misma unidad de ésa, ¿no?

P: ¿Qué es lo que tendría que ser la misma unidad que ésa? El radio o el diámetro? ¿Cuál?

A: Sería el diámetro.

P: Si el diámetro es una unidad, pues la longitud de la circunferencia mide Pi unidades, y yo cojo y me la traslado. La corto por aquí y me la traslado.

Aunque no se registró en una grabación, algún tiempo después de construir cuadrados de área dada y de trabajar en el significado de Pi como razón entre dos longitudes, se preguntó a los alumnos si distintos tipos de decimales infinitos podían representarse de forma exacta –no a través de aproximaciones decimales– en la recta. Esta vez, casi todos los estudiantes respondieron que los decimales infinitos periódicos pueden representarse en la recta de forma exacta (93%); una gran parte de ellos (72%) pensaba que los infinitos no periódicos correspondientes a raíces cuadradas también podían representarse en la recta de forma exacta; y algunos estudiantes pensaban lo mismo en el caso de Pi (24%).

– La indagación de los alumnos, por iniciativa propia, en el terreno del infinito potencial en la expresión decimal del numero Pi, que llevó a plantear dilemas cuya solución no estaba prevista en el proceso didáctico y quedaba fuera del alcance de los alumnos en esta etapa. En algunas ocasiones, las preguntas formuladas por los alumnos sobre un tópico revelan una profundidad en la comprensión de problemas relevantes acerca del mismo, y además proporcionan una motivación muy valiosa para dotar de significado a posteriores experiencias al respecto. Las siguientes cuestiones fueron planteadas por los estudiantes reiteradamente.

En la primera de ellas, los alumnos se preguntan cómo puede saberse que determinadas expresiones decimales no acabarán nunca, y cómo se puede estar seguro de ciertas características acerca de tales expresiones decimales; al final, incluso una de las alumnas demanda alguna clave para satisfacer su curiosidad. En esta etapa, los estudiantes no habían pasado de la concepción del infinito potencial y no tenían capacidad de imaginar cómo podían establecerse resultados acerca de un infinito actual:

> A: Pero en la enciclopedia, dice que no estaba seguro de que fuera irracional, sino que se seguían sacando muchos decimales y no estaban seguros [el número Pi].
>
> P: En la enciclopedia dice E que se habían sacado muchos decimales, pero no se estaba seguro, se seguían sacando decimales pero no se estaba seguro de que alguna vez fuera a acabar.
>
> A: Eso, eso es lo que yo vi, eso es lo que yo vi, «seño».
>
> P: ¿Qué?
>
> A: Que no se sabía si se podía acabar o no.
>
> A: No, aquí dice que sí era un número que nunca acaba. Eso venía, espera.
>
> P: Una cosa es que no se sepa si puede acabar y otra cosa es que se sepa que no acabe.
>
> A: Mira... [Uno de los alumnos que hacen su exposición encuentra una información interesante en sus papeles.]
>
> A: En el siglo XVII...
>
> A: ¿Y cómo se sabe, si acaba o no acaba?
>
> A: ...
>
> A: Dice que nadie sabe su valor exacto, ni lo sabrá nunca
>
> A: ¿Por qué?
>
> A: Y sin embargo, lo usamos...
>
> A: ¿Pero cómo se sabe que no va a acabar nunca?
>
> A: Pero, J, ¿cómo sabes que no se va a acabar nunca?
>
> [...]
>
> A: ¿Y cómo demostraron que no puede salirle un período y no va a acabar nunca?
>
> A: Eso no puede.
>
> P: ¿Que cómo lo demostraron? Es muy difícil, se tiraron más de veinte siglos para demostrarlo.
>
> A: ¿Y no nos lo puede contar aunque sea más sencillo?

La siguiente cuestión fue asimismo recurrente, e ilustra cómo los estudiantes pueden tener iniciativas no previstas por los investigadores y adentrarse en terrenos matemáticos complejos, pero también significativos, cuando se les permite realizar sus propias exploraciones más allá del contexto de las tareas de clase. Algunos alumnos que presentaban su trabajo sobre el numero Pi habían tratado de averiguar su valor a partir de la definición (razón entre las longitudes de la circunferencia y su diámetro). Estos alumnos habían medido distintas circunferencias y sus diámetros, habían dividido los resultados y habían encontrado distintas aproximaciones:

> A: ¿Cómo se sabe que el Pi que han hallado [los matemáticos] es el correcto y el exacto, y no ése [una de las aproximaciones dadas por los alumnos]?
>
> A: ¿Cómo, cómo?
>
> A: ¿Qué, qué, qué?
>
> A: Sí, que cómo sabemos que ...
>
> A: Porque ése lo inventó Pitágoras y el ese se lo han inventado ellos.
>
> A: ¿Qué tiene que ver Pitágoras?
>
> [...]
>
> A: Porque, como nos estábamos equivocando cada dos por tres cada vez que lo medíamos, decíamos: «¿Y cómo sabemos que no es el exacto, que el bueno es el nuestro y no el de...?
>
> P: El de Arquímedes, o el de...
>
> [...]
>
> A: ...que dice que hasta la Biblia, hasta la Biblia da una definición de Pi.
>
> A: «Seño», «seño», Isabel.
>
> Es que la verdadera es ésa, porque 3,14 es el valor que tiene que tener.
>
> A: Se ha encontrado un papiro que se escribió en Egipto, el valor de Pi es 3,16. Y el valor babilónico y bíblico fue de 3,0.
>
> P: De 3, fijaros.
>
> A: Tendríamos que buscar también cómo se las apañaron; o sea, qué midieron para que les diera 3.
>
> P: Para que les diera 3.
>
> A: Los egipcios también dieron un valor muy aproximado, que fue 3,1605.
>
> A: ¿Que cómo sabemos...?
>
> P: ¿Que cómo se sabe que lo de los egipcios no era verdad y ésta sí? Que estas cifras son correctas hasta donde se ha llegado.
>
> A: Es que a lo mejor, dentro de quinientos años, haya otra.
>
> P: ¿Puede cambiarle las primeras..., ese 3,1415 le van a cambiar alguna vez, o no, o esas ya son?
>
> A: «Seño», entonces, lo que yo digo es una cosa. Si éste, por ejemplo, es el exacto (señalando a la expresión de Vieta), y éste tampoco..., entonces puede ocurrir que [la aproximación que manejamos hoy] no sea exacto...»

Además, este tipo de exploraciones, por parte de los alumnos, sobre el significado de ciertos conceptos o tópicos matemáticos, los conduce, frecuentemente, a darse cuenta de que éstos ultimos son producto de una construcción social que evoluciona a lo largo del tiempo.

Profundidad de conocimiento y conversación sustantiva

En esta sección mostraremos cómo, durante las discusiones en gran grupo, se trataron en profundidad ideas centrales en la conceptualización del número real; como ejemplo, hemos elegido la noción de *número*, la noción de *inconmensurabilidad*, y los conceptos de *punto, segmento* y *medida*. En los episodios seleccionados se pondrá de manifiesto cómo los alumnos desarrollaron una comprensión relativamente compleja sobre estas ideas, explorando interconexiones y relaciones entre ellas.

– *La construcción progresiva de las nociones de* número *e* inconmensurabilidad. *Emergencia de un lenguaje común para referirse a los significados atribuidos a experiencias compartidas.* Tal como señalamos con anterioridad, la construcción de ideas matemáticas complejas no tiene lugar normalmente de forma lineal. Esto es así porque en el proceso ha de integrarse toda una red de elementos y conexiones entre ellos; dichas conexiones no se producen en los alumnos meramente porque el profesor las explicite, sino que ocurren en momentos distintos para individuos distintos conforme éstos se implican en dotar de sentido a una variedad de experiencias y actividades. En nuestro caso, el que estas experiencias fueran verbalizadas una y otra vez en la comunidad de la clase dio lugar a la emergencia de significados compartidos –o, más precisamente, tomados como compartidos–, y de términos compartidos para referirse a ellos. Tal proceso permitió alcanzar un cierto nivel de intersubjetividad que hizo posible el avance cognitivo del grupo hacia conceptos e ideas cada vez más complejos. Como ejemplo de la progresiva elaboración de significados sobre nociones clave en el concepto de *número real,* nos referiremos a las nociones de *número* e *inconmensurabilidad.*

– *El significado de número*. Algunas veces, tenemos tendencia a asumir que el significado de conceptos matemáticos básicos, como el concepto de *número,* están implícitamente claros para los alumnos y son compartidos por la comunidad de la clase. Éste no es siempre el caso, y una conversación sustantiva en la que las intuiciones individuales puedan explicitarse y confrontarse es una fuente de información valiosa para el profesor, así como una oportunidad muy conveniente para que los alumnos definan y clarifiquen los términos que están utilizando en discusiones complejas:

P: ¿Esto es un número [la expresión decimal de Ã2=1,4142...]?

A: Sí.

P: ¿Quién dice que sí?

A: Yo.

P: Que esto, el 1,4142... infinitas cifras...

A: Es una operación.

P: ¿Y quién dice que no es un número?

A: ¿Por qué es un número?

P: Bueno, los que dicen que sí. ¿Por qué eso es un número?

A: Yo. Porque está formado por cifras.

A: ¡Un módulo! [No se sabe qué significado atribuye el alumno a esta palabra].

A: No sé, no se puede contar exactamente porque es infinito... pero es un número.

P: Más razones por las que sea número.

A: Viene de una operación.

P: Viene de una operación, que es la raíz cuadrada.

A: Puede representarse en forma de raíz cuadrada.

P: ¿Puede representarse? ¿Cómo?

A: ¡Pero es que es la respuesta de una raíz cuadrada!

A: Ese número, es que ese número... Espérate, ese número, al igual que un periódico puro puede «disfrazarse» con una división, este resultado de infinito no periódico puede disfrazarse en forma de radical, ¿eh?

A: No.

[...]

P: Más razones ¿Hay más razones?

A: Sí.

A: Nada más que con ésas ya es un número.

A: Entre otras cosas, porque cualquier conjunto de cifras es un número. Nadie ha puesto reglas para decir que un número es lo que se puede...

P: Esto es lo que dice aquí. Está formado por cifras.

A: Pero, entonces, no tiene sentido decir si es un número. Todo lo que está formado por cifras, lo es.

[La profesora escribe en la pizarra 123456789101112... (un «entero de infinitas cifras»).]

P: ¿Está formado por cifras?

A: «Infinito, infinito» no es un número.

A: No es un número.

A: No. Que no es un número, que no puede haber infinitos si no son decimales.

Después de trabajar con la noción de *infinito* en diferentes situaciones, un alumno fue capaz de dar el siguiente argumento:

A: En los decimales infinitos, como 0,9999... tu puedes hacer una aproximación, como 0,999, y no hay mucha diferencia entre 0,999 y 0,9999; pero en cifras infinitas, como 9999... 9 no es lo mismo que 99, y 99 está lejos de 999, etc.

Consideramos este argumento interesante, porque se aproxima a la idea de convergencia de las sucesivas aproximaciones decimales de los decimales infinitos y a la falta de significado de los hipotéticos «enteros con infinitas cifras».

– *La noción de inconmensurabilidad.* Los alumnos tuvieron la oportunidad de trabajar con razones no racionales, tales como el lado y la diagonal de ciertos cuadrados, Pi y la proporción áurea, en repetidas ocasiones, conjugando los aspectos numéricos y geométricos. Uno de los objetivos de nuestro trabajo era observar si los estudiantes eran capaces de distinguir entre longitudes conmensurables e inconmensurables con respecto a otra longitud tomada como unidad. En otras palabras, pretendíamos ver si eran capaces de establecer una diferencia entre razones racionales e irracionales, por medio de actividades como la conmensuración de parejas de longitudes, la asignación de números a puntos de la recta en la que se ha marcado la unidad de medida, la asignación de números a los lados de las piezas de un tangram tomando uno de dichos lados como unidad de medida, la asignación de números a lados de cuadrados, las exploraciones en torno a Pi y al número de oro, etc. Presentamos a continuación algunas partes del proceso mediante el cual los alumnos acuñaron el término *proporción* para referirse a las razones irracionales; término que utilizaron para aludir a ellas en ocasiones posteriores.

Un grupo de alumnos estaba presentando su trabajo sobre el número de oro al resto de la clase. En un cierto momento de la presentación, estaban trabajando con rectángulos y pentágonos áureos de distinto tamaño:

P: Ah, mira lo que pregunta L.: «Si los pentágonos son de distinto tamaño..., ¿cómo es que el número es el mismo?»

A: Es el mismo, ¿no?, pero...

A: Tiene las mismas proporciones.

P: Porque, ¿qué quiere decir *proporción*?

Dice P que, si es más pequeño, ¿cómo va a salir el mismo número?

A: Porque no es que salga el mismo número, sino que salen las proporciones de ese número, o sea...

A: ¿Números equivalentes a ése?

P: No, números equivalentes no.

A: Que guardan las mismas proporciones.

P: Fijaos, en el sobre: si yo mido el lado grande con respecto al lado..., tomo el lado chico como unidad y mido el grande, me sale eso.

A: [No se entiende.]

P: Claro, entonces, ¿qué pasa con los distintos pentágonos, con los distintos rectángulos...?

A: En los distintos rectángulos, si haces lo mismo con esto, sale...

P: ... figura chica, guarda las proporciones del lado grande al lado chico.

A: ¡Ah!

A: Es como Pi, o sea, siempre la división de esto siempre sale lo mismo. Pues lo mismo es esto.

P: ¿Os acordáis del tangram, del cuadrado que hicimos, que yo os dejé en la hoja un cuadrado que era más chico?

A: No.

A: Sí.

P: Era igual pero más pequeño,

A: ¿Y por qué conservaba las medidas? Porque lo que conservaba... Si lo mides en centímetros, no conservaba las medidas, pero, si lo mides con respecto a la unidad, como la unidad se ha reducido igual...

[...]

A: El número de oro es el número, es el número que sale siempre en todos los rectángulos que tengan esa proporción.

¿Entiendes?

Es...

[...]

A: Es un número infinito no periódico.

P: Es otro número infinito no periódico.

A: Igual que Pi.

A: ¿Lo entiendes ya?

A partir de estas discusiones, varios alumnos (26%) asociaron el término *proporción* a las longitudes inconmensurables con la unidad de medida y, aunque no disponemos de grabaciones para ilustrarlo, en los ejercicios en que se pidió a los estudiantes que clasificaran los decimales infinitos no periódicos, distinguieron entre aquéllos que provenían de radicales, aquéllos que provenían de proporciones y los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias. Si bien, al dar ejemplos de cada tipo, muy pocos alumnos incluyeron las raíces cuadradas también en las «proporciones» –conexión que no se explicitó en la clase–, pensamos que, en una primera etapa de la comprensión de los números irracionales, los estudiantes habían dado un paso importante.

– *Conceptos de* punto, segmento *y* medida: *la confusión de aspectos empíricos y teóricos en la representación geométrica de los números reales.* Análogamente a como hemos señalado en relación con el concepto de *número,* en numerosas ocasiones, tendemos a trabajar con los alumnos bajo la suposición implícita de que, al referirnos a conceptos geométricos básicos –como el de punto o segmento de la recta–, éstos tienen en mente una idea similar a la nuestra. Cuando se explicitan significados o interpretaciones particulares, podemos encontrarnos con sorpresas en las nociones intuitivas de los estudiantes. En el siguiente episodio se pone de manifiesto la confusión entre los aspectos empíricos y teóricos de estos conceptos:

P: ¿Cómo son los puntos de una recta? ¿Tienen anchura o no tienen anchura?

A: No.

A: Sí.

A: Tú puedes hacer un punto más grande que otro.

P: ¿Tú puedes hacer un punto más grande que otro?

A: Sí, aunque sean décimas de milímetro te puede salir un punto más grande que otro.

P: Sergio, ¿qué?

A: Que no, porque si tienen anchura cogería más de un número.

A: ¿Cómo?

A: Pero es que aquí, a lo mejor, hay puntos tan pequeños que a lo mejor sí podrían...

P: Si hablamos de una recta ideal, con puntos ideales, los que nos imaginamos.

Los puntos ideales, ¿tienen dimensiones?

A: No, no.

A: No, pero pueden tener distinta anchura.

P: Distinta anchura... ¿Podrían tener distinta anchura?

A: No, no.

A: No.

A: Si son ideales

A: Que pueden tener distinta anchura...

Puede ocurrir que un punto ocupe toda la pizarra...

P: ¿Sí?

A: Si el punto ocupa toda la pizarra sería un conjunto de puntos; o sea, que no sería uno.

A: Es que, mira, del 0 al 1, ¿por qué no puede ser otro más pequeño?

P: Esto es un segmento; del 0 al 1 es un segmento; y éste otro segmento.

Los puntos, si yo los pinto físicamente, tienen un segmentillo, pero si me lo imagino...

A: ¡Ah!

P: ¿Entendéis esa diferencia?

A: ¿Cómo?

A: No.

P: Yo pinto un punto, pues depende de lo que sea de gruesa la punta de mi lápiz tendrá un segmentillo.

A: Claro.

P: Pero, si me lo imagino con la cabeza, ¿pueden ser más gruesos o menos gruesos?

A: No.

P: ¿Tienen anchura los puntos? ¿Pueden ser más gruesos o menos gruesos?

A: No.

En este caso particular, la negociación de significados en el terreno geométrico pudo ayudar a los alumnos a avanzar en la comprensión de la geometría como algo separado de la realidad física. Este paso adelante, mediante el cual los puntos, líneas y superficies dejan de ser considerados como objetos físicos, es esencial para la comprensión de la inconmensurabilidad, ya que es imposible constatar ésta en una figura; todo lo contrario, a partir de la experiencia práctica sólo podemos obtener longitudes conmensurables, puesto que nuestra percepción y nuestras necesidades prácticas se satisfacen en un número finito de pasos. De esta forma, la inconmensurabilidad se refiere sólo a objetos matemáticos ideales, y no puede ser mostrada (Arsac, 1987, p. 280).

En términos generales, durante la etapa de enseñanza primaria, la cuestión de la medida se ha venido abordando atendiendo a dos aspectos diferentes. En lo que se refiere al aspecto empírico, los alumnos aprenden a asignar un número a una longitud dada por medio de instrumentos de medida graduados. En lo que se refiere al aspecto formal, aprenden a aplicar ciertas fórmulas para hallar áreas, perímetros, etc. de diferentes figuras geométricas, normalmente sin profundizar en el significado de esta actividad. En estas condiciones, los alumnos llegan a enfrentarse con el problema de la inconmensurabilidad de longitudes con una base débil y superficial. Debido a esto, al tratar de la medida en el ámbito de los números reales, pueden surgir varios conflictos entre las interpretaciones, el nivel de comprensión y la formación matemática de los estudiantes y la del profesor. Es por ello que debemos estar alerta para detectar estos conflictos conforme se presentan cuando empezamos a entrar en cierta profundidad en el terreno geométrico de los números reales. Los siguientes episodios sirven para dar una idea de las dificultades que salieron a la luz en nuestro estudio en este terreno.

En una sesión de clase, después de dibujar un cuadrado de área 2, algunos alumnos tenían dudas sobre la medida de su lado. Era difícil para ellos admitir que una longitud finita pudiera tener una medida cuya expresión decimal fuese infinita no periódica. En estas circunstancias, el significado de la medida, en sus aspectos empírico y teórico, volvió a plantearse:

A: Que a lo mejor puede equivocarse de que eso sea la Ã3. El lado sería infinito, luego no puede medir, ese lado es una aproximación aunque aparentemente, visualmente, lo veamos exacto, pero no existirá un cuadrado exacto con área 2.

A: «Seño», en nuestra mente sí es exacto, pero ahí es posible que falle.

[...]

P: A ver, a ver si separamos ya las dos cosas. ¿Vosotros habéis visto una recta donde esto mida 1 y esto mida 1/3 exactamente?

A: No.

P: No, pero en vuestra cabeza sí lo mide, ésta es la tercera parte, y ya está. ¿Entonces por qué ponéis tantas pegas a éste, y a éste no le ponéis pegas?

A: Porque ese es exacto y, por lo menos, se puede dibujar más seguro.

A: Que es lo mismo.

P: ¿Esto es 1/3? ¿Esto es exactamente 1/3?

A: Sí.

P: O sea que 1/3 sí. ¿Y raíz de 2 no?

A: Hombre, es que Ã2...

A: Pues sí, porque 1/3 es exacto.

A: Es lo mismo.

P: O sea, ¿que 1/3 sí lo podéis dibujar exactamente ahí y la Ã2 no?

A: Si 1/3 se pone, la raíz de 2 también.

A: No.

A: Pero, si es que estamos hablando de un infinito y de un exacto, ¿cómo va a ser lo mismo? Si es que a la fuerza tiene que ser diferente. Si estamos hablando de un infinito y de un exacto...

P: Bueno, ¿alguien pensaba que esto mide exactamente Ã2? Prescindiendo de las limitaciones físicas. De las limitaciones físicas prescindimos. ¿Por qué esto mide Ã2 exactamente?

A: Por ejemplo, si tomamos el teorema de Pitágoras... La hipotenusa igual a la raíz cuadrada de no se qué... y sale Ã2.

A: Puede que el teorema de Pitágoras sea una aproximación.

En otra sesión, algunos de los estudiantes llegaron a plantear cuestiones realmente sutiles en relación con los aspectos empírico y teórico de la medida:

P: Así que los enteros son útiles para contar, los racionales son útiles para medir... y éstos [los irracionales], ¿son útiles para algo? Para medir todas las longitudes posibles, ¿son suficientes los racionales?

A: No, no.

P: Porque hay longitudes, como éstas [lados de cuadrados de áreas 2, 3...], que no pueden medirse con números racionales...

A: Pero, si no lo sabemos... si no sabemos que vienen de un cuadrado, entonces, siempre las medimos con racionales.

P: ¿Pero, si sabemos que vienen de un cuadrado?

A: Entonces, sí.

A: Pero, entonces, todas las longitudes pueden venir de cuadrados. Y, entonces, todas las longitudes pueden medirse con...

P: Pero, si el cuadrado tiene área 4, entonces, el lado mide 2.

A: Sí, eso es verdad.

P: Y, si el cuadrado tiene área 4, ¿qué mide el lado?

A: Mide 2/3.

CONCLUSIÓN

Queremos concluir el presente trabajo haciendo un resumen de la importancia que ha tenido, para nuestro estudio sobre la construcción de pensamiento numérico avanzado, la consideración de los aspectos sociales, tanto en la vertiente actitudinal como en la vertiente cognitiva. Como hemos puesto de manifiesto, para que tenga lugar la construcción de conocimiento mediante la interacción en el aula de matemáticas, no sólo hemos de atender a la interacción específica en el terreno cognitivo, sino que hemos de prestar especial atención al clima actitudinal en el que pretendemos que ésta ocurra. En nuestra experiencia, el fomento en los alumnos de la iniciativa, la confianza en las habilidades cognitivas propias y de los compañeros y del respeto mutuo que de ello se deriva ha sido un factor decisivo para que la construcción de conocimiento en la comunidad de la clase se haya producido de forma auténtica y fructífera. Para lograr esto, ha sido necesario desarrollar la confianza en las capacidades de los alumnos, tratar de proporcionarles oportunidades para actualizarlas y desarrollarlas y aprender a apreciar sus logros para propiciar la consolidación de los mismos.

En nuestra opinión, la labor del profesor o profesora es delicada en el aspecto mencionado, porque confiar en los alumnos significa ser capaz de asumir el riesgo de la corresponsabilidad en el proceso educativo, y esto es especialmente difícil de hacer cuando se está sujeto a la fuerte presión del contenido curricular. Cuando hablamos de pensamiento matemático avanzado, es complicado mantener el equilibrio entre la responsabilidad por el contenido matemático que los alumnos han de asimilar y el riesgo que supone confiar en éstos como artífices de su propio proceso de aprendizaje. Sin embargo, es precisamente en contenidos de nivel avanzado cuando más hemos de contar con el interés, la iniciativa y la autonomía de los alumnos, ya que, por la sofisticación de los procesos de comprensión requeridos, se hace cada vez más imprescindible la voluntad, la atención y el trabajo del agente que ha de llevarlos a cabo. En nuestro caso, el reconocimiento de este hecho y el esfuerzo por ser coherentes con esta visión se han visto ampliamente recompensados por la creatividad y la profundidad de pensamiento con que los alumnos han respondido en numerosas ocasiones, y por la sustantividad de la interacción didáctica en la que se han implicado, superando con creces nuestras expectativas iniciales.

A través del análisis de los episodios ocurridos durante la interacción en el aula, esperamos haber ilustrado la calidad de los procesos de comprensión de los estudiantes sobre el número real. Pensamos que estos procesos, no sólo fueron favorecidos, en gran medida, por dicha interacción, sino que además pudieron ser expresados, compartidos y observados gracias a la misma. De esta forma, el enfoque sociocognitivo ha resultado fructífero para promover la comprensión matemática de los estudiantes y para realizar investigación sobre ella. A este respecto, queremos indicar también las ventajas de la metodología empleada, la cual nos ha permitido obtener una visión más explícita y profunda de cómo se desarrollaron los procesos de comprensión de los alumnos en una clase de matemáticas que la que hubiera podido proporcionarnos la observación puntual de sesiones aisladas o la mera observación externa de un proceso didáctico que siguiera el currículo habitual para el tópico que nos ocupa. La mayoría de los episodios presentados tienen una continuidad y una evolución en el tiempo, directamente determinada por la intención de la profesora-investigadora y su interacción constante con los alumnos. En este sentido, la metodología de investigación-acción nos ha resultado especialmente adecuada para producir y para observar procesos de enseñanza-aprendizaje que responden a una intención y a una acción sistemáticas, que evolucionan a lo largo del tiempo con motivo de las contribuciones de todas las personas implicadas y que se producen en contextos educativos naturales.

Por ultimo, señalaremos que nuestro tratamiento del concepto de *número real* no ha pretendido agotar el tema con estudiantes de este nivel. Sin embargo, pensamos que el trabajo significativo que muchos de estos alumnos han realizado sobre sus distintos sistemas de representación y las conexiones entre los mismos –conceptos como los de *número* y *medida*, *procesos infinitos*, etc.– constituye una buena base sobre la que construir y consolidar, a lo largo de distintas etapas y en distintos niveles de la enseñanza secundaria, el pensamiento numérico de nivel avanzado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARSAC, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'epistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 8, pp. 267-312.

BALACHEFF, N. (1986). Cognitive versus situational analysis of problem solving behaviours. *For the learning of Mathematics,* 6(3), pp. 10-12.

BARTOLINI-BUSSI, M. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction, en Biehler, R. et al. (eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.*

BAUERSFELD, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 11, pp. 23-41.

BAUERSFELD, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom, en Biehler, R. et al. (eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.*

BELL, E.T. (1989). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

BIEHLER, R., SCHOLZ, R., STRASSER, R. y WINKELMANN, B. (eds.) (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

BISHOP, A., GEOFFREE, F. (1986). Classroom organization and dynamics, en Christiansen, A. et al. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education.*

BROMME, R. y STEINBRING, H. (1994). Interactive development of subject matter in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 27, pp. 217-248.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada: Comares.

CHRISTIANSEN, B., HOWSEN, A. y OTTE, M. (eds.) (1986). *Perspectives on Mathematics Education.* Dordrecht: Reidel.

COBB, P., YACKEL, E. y WOOD, T. (1991). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, pp. 2-33.

DOUADY, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11, pp. 77-110.

FISCHBEIN, E., JEHIAM, R. y COHEN, D. (1995). The concept of irrational numbers in High-School students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics,* 29, pp. 29-44.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T. (1992). *Learning and teaching with understanding,* en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York: MacMillan Publishing Company.

LABORDE, C. (1994). Working in small groups: a learning situation?, en Biehler, R., Scholz, R. y otros (eds.). *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

LERMAN, S. (1989). Construtivism, mathematics and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 211-223.

LO, J. y WHEATLEY (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics,* 27, pp. 145-164.

MCNIFF, J. (1988). *Action Research: Principles and practice*. Londres: Macmillan Education Ltd.

MONAGHAN, J. (1988). Real mathematics. *The Mathematical Gazette*, 72, pp. 276-281.

NEWMANN, F., SECADA, W. yWEHLAGE, G. (1995). *A Guide to Authentic Instruction and Assessment: Vision, Standards and Scoring.* Madison: WCER.

RICHADSON, V. (1994). Conducting research on practice. *Educational Researcher*, 23, pp. 5-10.

RICO, L. (ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid: Síntesis.

ROMERO, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Granada: Comares.

STRASSER, R. (1994). Interaction in the classroom, en Biehler, R., Scholz, R. et al. (eds.). *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*.

TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

VAN DEN BRINK, J. (1990). Classroom research. *For the Learning of Mathematics*, 10, pp. 35-38.

VOIGHT, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 275-298.

[Artículo recibido en mayo de 1997 y aceptado en mayo de 1998.]